1　多項式

§１　整式

1 単項式と多項式

$3x$ や x^3-2x^2+4x-1 のような式を整式というが，これには単項式と多項式を含む。
単項式とは $3x$ のように数や文字の積で表される式のことである。

$\frac{x}{3}$ は単項式だが，$\frac{3}{x}$ は単項式ではない。文字が分母にくるものは含めない。

単項式と多項式

整式 $\begin{cases} \text{単項式…数や文字の積で表される式} \\ \text{多項式…単項式の和で表される式} \end{cases}$

次に次長と係長みたいな次数と係数であるが，次数は文字をかけ合わせた回数で，係数はその文字の前についている数字で何倍したかを表している。

次数と係数

例　$2x$　…次数は１，係数は２
　　$-3x^2$　…次数は２，係数は-3

多項式 $3x^2-2x+4$ は $3x^2$ と $-2x$ と ４ の ３ つの単項式が和で表されたものである。

$3x^2+(-2x)+4$ と必ず＋でつながれたものとして考えるので，$3x^2$，$2x$，４としないこと。文字を含んでいない４を定数項という。

項と定数項

整式(多項式) $3x^2-2x+4$ の項は，$3x^2$ と $-2x$ と 4(4 を定数項という)。

2 多項式における次数

整式の整理

$2x^2y$ と $-5x^2y$ のように文字の部分が全く同じものを同類項という。

整式の同類項をまとめる方法は２通りある。
降べきの順　$-3x^2-x+3$
昇べきの順　$3-x-3x^2$

- 降べきの順…次数が低くなるように並べる。
- 昇べきの順…次数が高くなるように並べる。

x^2y+xy^2 では，x の次数は２次，y の次数は３次，整式自体では４次である。

多項式における次数

多項式では各項の次数のうち，最高のものをその整式(多項式)の次数とする。

注　べき(冪)とは，ある１つの数や文字を繰り返しかけ合わせたものをいう。冪が常用漢字に含まれないため累乗に置き換えられたが，降べき(昇べき)の順や方べきの定理にその名を残している。

§２　整式の計算方法

1 指数法則

ここで，指数法則を確認しておこう。(中学校では m，n が自然数，つまり正の整数のときしか扱わなかったが，今後 0，マイナス，分数と拡張されるのでお楽しみに！)

指数法則

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^m = a^m b^m$

注　$a^2 \times a^3$ と $(a^2)^3$ を確認しておこう。

$a^2 \times a^3 = aa \times aaa = a^5$

$(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a^6$

である。

2 整式の整理

やや複雑な多項式の同類項をまとめて，すっきりと整理しよう。

１つの文字について，降べきの順に並べかえてみよう。これは，因数分解のときに必要な作業になるので，ここでしっかりおさえておこう。

例　$x^2 - 2xy + 3y^2 - 5xy - y$ の同類項をまとめよ。

同類項は $-2xy$ と $-5xy$ であるから $(-2-5)xy = -7xy$ とまとめられる。

与式 $= x^2 - 7xy + 3y^2 - y$ 。

例　$2x^2 - 3xy + y^2 + 7x - 4y + 5$ を[y]の降べきの順に整理せよ。

与式 $= y^2 + (-3x-4)y + 2x^2 + 7x + 5 = y^2 - (3x+4)y + 2x^2 + 7x + 5$ 。

§３　整式の乗法

1 乗法公式

2 乗の乗法公式についてまとめておこう。高校生は，Ｖも公式として覚えておいた方が便利だ。

乗法公式

2 次の乗法公式

- Ⅰ　$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
  　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- Ⅱ　$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
- Ⅲ　$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
- Ⅳ　$(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
- Ⅴ　$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

例

$(a-2b)(a+3b)$
$=a^2+(-2b+3b)a+(-2b)\cdot 3b$
$=a^2+ab-6b^2$

高校の数学では 3 乗の公式は不可欠である。絶対に覚えること。Ⅶは因数分解のときによく用いる。

3 次の乗法公式

- Ⅵ　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
  　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- Ⅶ　$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
  　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

```
      1   1
     / \ / \
    1   2   1
   / \ / \ / \
  1   3   3   1
 / \ / \ / \ / \
1   4   6   4   1
```

パスカルの三角形を利用すると，各項の係数が 1，3，3，1 とでる。

ちなみに $(a+b)^4$ は

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

となる。

例題1　$(2x-1)(4x^2+2x+1)$ を展開せよ。

解答　与式 $=(2x)^3-1$
$=8x^3-1$。

注　不幸にして 3 次の乗法公式になっていることに気がつかなかった人は，次のようにすることになる。

$(2x-1)(4x^2+2x+1)$
$=2x(4x^2+2x+1)-(4x^2+2x+1)$

$$\begin{array}{rrrr} =8x^3 & +4x^2 & +2x & \\ & -4x^2 & -2x & -1 \\ \hline 8x^3 & & & -1 \end{array}$$

2 やや複雑な展開

やや複雑な展開は，根性があればできるが，それはもっと大事なところで使おう。ここでは頭を使って楽することを考える。
まずは置き換え。

例題2　$(x^2-3xy+2y^2)(x^2-3xy-2y^2)$ を展開する。

解答　$x^2-3xy=\mathrm{A}$ とおくと，

$$\text{与式}=(\mathrm{A}+2y^2)(\mathrm{A}-2y^2)$$
$$=\mathrm{A}^2-(2y^2)^2=\mathrm{A}^2-4y^4。$$

A をもとに戻して，

$$\text{与式}=(x^2-3xy)^2-4y^4$$
$$=x^4+2\cdot x^2\cdot(-3xy)+(-3xy)^2-4y^4$$
$$=x^4-6x^3y+9x^2y^2-4y^4。$$

例題3　$(2a-3b-c)^2$ を展開する。

解答　$\text{与式}=(2a-3b-c)^2$

$$=(2a)^2+(-3b)^2+(-c)^2+2\cdot 2a\cdot(-3b)+2\cdot(-3b)\cdot(-c)+2\cdot(-c)\cdot 2a$$
$$=4a^2+9b^2+c^2-12ab+6bc-4ca$$

例題4　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ を展開する。

解答　$\text{与式}=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

$(x^2+5x)=\mathrm{A}$とおくと，

$$\text{与式}=(\mathrm{A}+4)(\mathrm{A}+6)=\mathrm{A}^2+10\mathrm{A}+24$$

A をもとに戻して

$$\text{与式}=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24$$
$$=x^4+10x^3+25x^2+10x^2+50x+24$$
$$=x^4+10x^3+35x^2+50x+24。$$

例題5　$(x^2-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$ を展開せよ。

解答　$\text{与式}=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

$$=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$$
$$=(x^3+1)(x^3-1)$$
$$=(x^3)^2-1$$
$$=x^6-1。$$